Zinseszinsrechnung

1 Endkapital

Das ist das Kapital am Ende der Laufzeit, also inklusive Zinseszinsen.

```
(%i1) K[n]=K[0]*r**n;
```

(%o1) $K_n = K_0\, r^n$

Aufzinsungsfaktor

```
(%i2) r=1+p/100;
```

(%o2) $r = \frac{p}{100} + 1$

```
(%i3) r=1+i;
```

(%o3) $r = i + 1$

2 Anfangskapital

Das ist das Kapital am Beginn der Laufzeit. Es enthält keine Zinsen.

```
(%i4) K[0]=K[n]/r**n;
```

(%o4) $K_0 = \frac{K_n}{r^n}$

3 Zinssatz

Der Zinssatz p (in Prozent) ist üblicherweise dekursiv per annum.

```
(%i5) r=(K[n]/K[0])**(1/n);
```

(%o5) $r = \left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{\frac{1}{n}}$

```
(%i6) p=100*(r-1);
```

(%o6) $p = 100\,(r-1)$

4 Laufzeit

n in die Anzahl der Jahre.

```
(%i7) n=(log(K[n])-log(K[0]))/log(r);
```

(%o7) $$n = \frac{\log(K_n) - \log(K_0)}{\log(r)}$$

Rentenrechnung

1 Endwert der nachschüssigen Rente

Wert am Ende der Zahlungen inklusive Zinsen.

```
(%i8)  E=(r**n-1)*R/i;
```

(%o8) $E = \frac{(r^n - 1)\ R}{i}$

2 Barwert der nachschüssigen Rente

Wert am Beginn der Zahlungen (enthält keine Zinsen).

```
(%i9)  B=R*(1-v**n)/i;
```

(%o9) $B = \frac{(1 - v^n)\ R}{i}$

3 Endwert der vorschüssigen Rente

```
(%i10) E = R*((r**n-1)/d);
```

(%o10) $E = \frac{(r^n - 1)\ R}{d}$

d ist der Diskontsatz, d = i/(1+i)

4 Barwert der vorschüssigen Rente

```
(%i11) B=R*(1-v**n)/d;
```

(%o11) $B = \frac{(1 - v^n)\ R}{d}$

5 Äquivalenzprinzip

ÄQUIVALENZPRINZIP

Das ist das Grundprinzip von Geldgeschäften:

Leistung = Gegenleistung (bezogen auf denselben Zeitpunkt)

ANWENDUNGEN

* Rentenumwandlung

* Investitionsrechnung

* Tilgungsplan

```
(%i12) kill(all);
```

(%o0) *done*

Kosten- und Preistheorie

1 Lineare Kostenfunktion

Die lineare Kostenfunktion ist ein sehr einfaches Modell. K = Gesamtkosten k = proportionale Kosten k*x = variable Kosten F = Fixkosten

Das Schaubild ist eine Gerade.

```
(%i1) K(x):=k*x+F;
```

(%o1) $\mathrm{K}(x) := k\,x + F$

Bei einer linearen Kostenfunktion gibt es kein -> Betriebsoptimum!

2 Quadratische Kostenfunktion

Das Schaubild ist der monoton steigende Zweig einer Parabel (man muss die sinnvollen Eigenschaften beachten).

```
(%i2) K(x):=a*x**2+b*x+c;
```

(%o2) $\mathrm{K}(x) := a\,x^2 + b\,x + c$

c sind die Fixkosten

3 Kubische Kostenfunktion

Diese Kostenfunktion tritt beim s-förmigen Kostenverlauf auf.

```
(%i3) K(x):=a*x**3+b*x**2+c*x+d;
```

(%o3) $\mathrm{K}(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

d sind die Fixkosten Eine geeignete Kostenfunktion dritten Grades gibt eine s-förmige Kostenkurve (wie schon oben gesagt).

```
(%i4) kill(all);
```

(%o0) *done*

4 Betriebsoptimum

Das Betriebsoptimum ist jene Ausbringungsmenge, bei der die Durch- schnitts- kosten am kleinsten werden. Die kleinsten Durchschnitts- kosten heißen auch langfristige Preisuntergrenze. Die Durchschnitts- kosten nennt man auch Stückkosten. Die Berechnung des Betriebsoptimums ist eine Extremwertaufgabe Allgemein für Kostenfunktion

```
(%i1) K(x);
```

(%o1) $\mathrm{K}\left(x\right)$

Allgemein für Durchschnittskosten

Durchschnittskosten und Stückkosten meinen denselben Sachverhalt!

```
(%i2) DK(x):=K(x)/x;
```

(%o2) $\mathrm{DK}\left(x\right):=\frac{\mathrm{K}\left(x\right)}{x}$

Wir müssen die erste Ableitung NULL setzen, das ist die notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremwerts!

```
(%i3) ab:diff(DK(x),x);
```

(%o3) $\frac{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{K}\left(x\right)}{x}-\frac{\mathrm{K}\left(x\right)}{x^2}$

```
(%i4) l:solve(ab=0);
```

(%o4) $[x=\frac{\mathrm{K}\left(x\right)}{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{K}\left(x\right)}]$

Das ist die allgemeine Lösung für das Betriebsoptimum: Grenzkosten = Durchschnittskosten

5 Minimum der Durchschnittskosten = langfristige Preisuntergrenze

Wenn man das Betriebsoptimum in die Durchschnittskosten einsetzt, erhält man das Minimum der Durchschnittskosten. Dieses nennt man auch langfristige Preisuntergrenze.

6 Grenzkosten

Die Grenzkosten geben an, wie sich die Kosten ändern, wenn sich die Ausbringungsmenge im Durchschnitt um eine Mengeneinheit (ME) ändert.

Die Grenzkosten sind die erste Ableitung der Gesamtkosten.

```
(%i5) K(x);
```

(%o5) $\mathrm{K}\left(x\right)$

```
(%i6) GK(x):='diff(K(x),x);
```

(%o6) $\mathrm{GK}\left(x\right):=\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{K}\left(x\right)$

7 Kostenkehre

Die Kostenkehre, ist der Wendepunkt der Kostenkurve. In der Kostenkehre haben die Grenzkosten ein Minimum. Kostenfunktion

```
(%i7) K(x);
```

(%o7) $\mathrm{K}\left(x\right)$

Man muss die zweite Ableitung der Kostenfunktion NULL setzen

```
(%i8) ab2:'diff(K(x),x,2);
```

(%o8) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{K}\left(x\right)$

```
(%i9) l:solve(ab2=0,x);
```

(%o9) $[\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{K}\left(x\right)=0]$

8 Definition: Nachfrage

Die Nachfrage gibt an, wie sich die nachgefragte Menge ändert, wenn sich der Preis ändert.

9 Normales Nachfragegesetz

wenn der Preis steigt, sinkt die Nachfrage und umgekehrt wenn der Preis sinkt, steigt die Nachfrage

Eine bekannte Ausnahme ist der Snob-Effekt ("was nichts kostet, ist nichts wert")

10 Lineare Nachfragefunktion

Das Schaubild ist eine fallende Gerade.

```
(%i10) p(x):=a*x+b;
```

(%o10) $\mathrm{p}(x) := a\,x + b$

11 Quadratische Nachfragefunktion

Das Schaubild ist der monoton fallende Teil einer Parabel.

```
(%i11) p(x):=a*x**2+b*x+c;
```

(%o11) $\mathrm{p}(x) := a\,x^2 + b\,x + c$

Berechnungen

* lineare Funktion aus zwei Punkten * lineare Funktion aus mehr als zwei Punkten -> lineare Regression * quadratische Funktion aus drei Punkten

12 Definition: Umsatz

Der Umsatz (auch Erlös) ist das Produkt aus Menge x Preis

Das darf man nicht mit dem mengenmäßigen Umsatz, den man auch Absatz (oder auch -> Nachfrage nennt) verwechseln.

```
(%i12) U(x):=p(x)*x;
```

(%o12) $\mathrm{U}(x) := \mathrm{p}(x)\,x$

13 Umsatz bei linearer Nachfragefunktion

Die Schreibweise der Nachfragefunktionen als p(x) = f(x) ist zwar üblich, aber unsauber. Der Preis p ist nämlich die abhängige Variable. Man sollte eigentlich schreiben x(p) = f(p).

```
(%i13) p(x):=a*x+b;
```

(%o13) $\mathrm{p}(x) := a\,x + b$

```
(%i14) U(x):=p(x)*x;
```

(%o14) $\mathrm{U}(x) := \mathrm{p}(x)\;x$

```
(%i15) U(x);
```

(%o15) $x\;(a\,x + b)$

```
(%i16) expand(%);
```

(%o16) $a\,x^2 + b\,x$

Ergebnis: wenn eine lineare Nachfragefunktion gegeben ist, dann ist die Umsatzfunktion eine quadratische Funktion

14 Umsatz bei quadratischer Nachfragefunktion

```
(%i17) p(x):=a*x**2+b*x+c;
```

(%o17) $\mathrm{p}(x) := a\,x^2 + b\,x + c$

```
(%i18) U(x):=p(x)*x;
```

(%o18) $\mathrm{U}(x) := \mathrm{p}(x)\;x$

```
(%i19) U(x);
```

(%o19) $x\;\left(a\,x^2 + b\,x + c\right)$

```
(%i20) expand(%);
```

(%o20) $a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x$

Bei einer quadratischen Nachfragefunktion ergibt sich eine Umsatzfunktion dritten Grades.

```
(%i21) kill(all);
```

(%o0) *done*

15 Umsatzmaximale Menge

(%i1) `p(x);`

(%o1) $\mathrm{p}(x)$

(%i2) `U(x):=p(x)*x;`

(%o2) $\mathrm{U}(x) := \mathrm{p}(x)\, x$

Man muss die erste Ableitung bestimmen.

(%i3) `ab:diff(U(x),x);`

(%o3) $x \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}(x)\right) + \mathrm{p}(x)$

Wenn man diese Ableitung NULL setzt, erhält man die umsatzmaximale Menge.

16 Umsatzmaximaler Preis

Wenn man die umsatzmaximale Menge in die Nachfragefunktion einsetzt, erhält man den umsatzmaximalen Preis.

17 Maximaler Umsatz

Wenn man die umsatzmaximale Menge in die Umsatzfunktion einsetzt, dann erhält man den maximalen Umsatz.

18 Defintion: Gewinn

Gewinn = Erlös - Kosten oder Gewinn = Umsatz - Kosten

(%i4) `G(x):=E(x)-K(x);`

(%o4) $\mathrm{G}(x) := \mathrm{E}(x) - \mathrm{K}(x)$

(%i5) `G(x):=U(x)-K(x);`

(%o5) $\mathrm{G}(x) := \mathrm{U}(x) - \mathrm{K}(x)$

19 Gewinn

```
(%i6) G(x) > 0;
```

(%o6) $x\,\mathrm{p}(x) - \mathrm{K}(x) > 0$

20 Weder Gewinn noch Verlust

```
(%i7) G(x)= 0;
```

(%o7) $x\,\mathrm{p}(x) - \mathrm{K}(x) = 0$

21 Verlust

```
(%i8) G(x) < 0;
```

(%o8) $x\,\mathrm{p}(x) - \mathrm{K}(x) < 0$

22 Berechnung der Gewinnzone

```
(%i9) G(x) = 0;
```

(%o9) $x\,\mathrm{p}(x) - \mathrm{K}(x) = 0$

```
(%i10) E(x) = K(x);
```

(%o10) $\mathrm{E}(x) = \mathrm{K}(x)$

Untergrenze der Gewinnzone: * Break Even Point * Nutzenschwelle * Gewinnschwelle

Obergrenze der Gewinnzone: * Nutzengrenze * Gewinngrenze

23 Cournotsche Menge

Die Counotsche Menge ist jene Menge, für die der Gewinn maximal wird. Das ist also die gewinnmaximale Menge.

Wenn man die Cournotsche Menge in die Nachfragefunktion einsetzt, erhält man den Cournotschen Preis. Der sogenannte Cournotsche Punkt hat zwei Koordinaten: die Cournotsche Menge xC und den Cournotschen Preis pC.

Wenn man den Cournotschen Preis in den Gewinn einsetzt, erhält man den maximalen Gewinn.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

1 Wahrscheinlichkeits-verteilung

```
(%i11) n:6;
```

(%o11) 6

Zufallsvariable

```
(%i12) X:makelist(x[i],i,1,n);
```

(%o12) $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$

Absolute Häufigkeiten

```
(%i13) H:makelist(h[i],i,1,n);
```

(%o13) $[h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6]$

```
(%i14) N:sum(h[i],i,1,'n);
```

(%o14) $\sum_{i=1}^{n} h_i$

Relative Häufigkeiten = Wahrscheinlichkeiten

```
(%i15) P:H/N;
```

(%o15) $[\frac{h_1}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \frac{h_2}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \frac{h_3}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \frac{h_4}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \frac{h_5}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \frac{h_6}{\sum_{i=1}^{n} h_i}]$

2 Erwartungswert

Der Erwartungswert ist der gewogenene Durchschnitt. Er ergibt sich nicht aus der Urliste, sondern aus einer gruppierten Liste.

```
(%i16) kill(all);
```

(%o0) *done*

```
(%i1) E(X)=sum(h[i]*x[i],i,1,n)/sum(h[i],i,1,n);
```

(%o1) $\mathrm{E}(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i}$

```
(%i2) E(X)=sum(p[i]*x[i],i,1,n);
```

(%o2) $\mathrm{E}\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}p_i\,x_i$

3 Varianz

Die Varianz ist die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert.

```
(%i3) V(X) = E((X-m)**2);
```

(%o3) $\mathrm{V}\left(X\right)=\mathrm{E}\left({\left(X-m\right)}^{2}\right)$

4 Streuung oder Standardabweichung

Die Standardabweichung ist die Wurzel aus der Varianz.

```
(%i4) S(X) = sqrt(V(X));
```

(%o4) $\mathrm{S}\left(X\right)=\sqrt{\mathrm{V}\left(X\right)}$

5 Beispiel: Schularbeitenstatistik

Die österreichische Notenskala ist in diesem Beispiel die Zufallsvariable X

```
(%i5) X:[1,2,3,4,5];
```

(%o5) $[1,2,3,4,5]$

Häufigkeiten: Es gab 2 mal Sehr gut, 3 mal Gut, 6 mal Befriedigend, 4 mal Genügend und 5 mal Nicht genügend.

```
(%i6) H:[2,3,6,4,2];
```

(%o6) $[2,3,6,4,2]$

Die Länge der Liste bestimmen als Obergrenze für den Summationsindex:

```
(%i7) n:length(H);
```

(%o7) 5

(%i8) `N:sum(H[i],i,1,n);`

(%o8) 17

(%i9) `P:H/N;`

(%o9) $[\frac{2}{17},\frac{3}{17},\frac{6}{17},\frac{4}{17},\frac{2}{17}]$

6 Der Erwartungswert

(%i10) `m:sum(P[i]*X[i],i,1,n);`

(%o10) $\frac{52}{17}$

(%i11) `X1:(X-m)**2;`

(%o11) $[\frac{1225}{289},\frac{324}{289},\frac{1}{289},\frac{256}{289},\frac{1089}{289}]$

7 Die Varianz

(%i12) `v:sum(P[i]*X1[i],i,1,n);`

(%o12) $\frac{390}{289}$

8 Die Streuung (Standardabweichung)

(%i13) `s:sqrt(v);`

(%o13) $\frac{\sqrt{390}}{17}$

9 Additionssatz

(%i14) `"W(A oder B) = W(A) + W(B)";`

(%o14) $W(AoderB) = W(A) + W(B)$

10 Additionssatz auf eine Verteilung angewendet

(%i15) ....

```
'sum(W(x[k]),k,1,'n)=1;
```

.(%o15) $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{W}\left(x_k\right) = 1$

11 Kumulierte Verteilung

```
(%i16) W(x<=k)='sum(W(x[i]),i,1,k);
```

.

(%o16) $\mathrm{W}\left(x <= k\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{W}\left(x_i\right)$

```
(%i17) kill(all);
```

(%o0) *done*

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

1 Binomialverteilung

Parameter: n (Umfang der Stichprobe) p (zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit)

(%i1) `n;`

(%o1) n

(%i2) `p;`

(%o2) p

(%i3) `E:n*p;`

(%o3) $n\,p$

(%i4) `V:n*p*(1-p);`

(%o4) $n\,(1-p)\,p$

(%i5) `W(k):=binomial(n,k)*p**k*(1-p)**(n-k);`

(%o5) $\mathrm{W}\,(k) := \binom{n}{k}\,p^k\,(1-p)^{n-k}.$

2 Poissonverteilung

Parameter: m=E=V

(%i6) `m;`

(%o6) m .

(%i7) `W(k):=m**k/k!*exp(-m);`

(%o7) $\mathrm{W}\,(k) := \frac{m^k}{k!}\exp(-m)$

3 Komplementär-ereignis

(%i8) "W(A')=1-W(A)";

(%o8) $W(A') = 1 - W(A).$

(%i9) kill(all);

(%o0) *done*

Differentialrechnung

1 Potenzregel

```
(%i1) f(x):=x**n;
```

(%o1) $\mathrm{f}(x) := x^n$

```
(%i2) 'diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

(%o2) $\frac{d}{d\,x}\,x^n = n\,x^{n-1}$

2 Regel vom konstanten Faktor

```
(%i3) f(x):=c*u(x);
```

(%o3) $\mathrm{f}(x) := c\,\mathrm{u}(x)$

```
(%i4) 'diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

(%o4) $\frac{d}{d\,x}\,(c\,\mathrm{u}(x)) = c\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}(x)\right)$

3 Summen- und Differenzregel

```
(%i5) f(x):=u(x)+v(x);
```

(%o5) $\mathrm{f}(x) := \mathrm{u}(x) + \mathrm{v}(x)$

```
(%i6) 'diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

(%o6) $\frac{d}{d\,x}\,(\mathrm{v}(x) + \mathrm{u}(x)) = \frac{d}{d\,x}\,\mathrm{v}(x) + \frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}(x)$

4 Produktregel

```
(%i7) f(x):=u(x)*v(x);
```

(%o7) $\mathrm{f}(x) := \mathrm{u}(x)\;\mathrm{v}(x)$

(%i8) `'diff(f(x),x)=diff(f(x),x);`

(%o8) $$\frac{d}{d\,x}\,(\mathrm{u}\,(x)\;\mathrm{v}\,(x)) = \mathrm{u}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{v}\,(x)\right) + \mathrm{v}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}\,(x)\right)$$

5 Quotientenregel

(%i9) `f(x):=u(x)/v(x);`

(%o9) $$\mathrm{f}\,(x) := \frac{\mathrm{u}\,(x)}{\mathrm{v}\,(x)}$$

(%i10) `'diff(f(x),x)=diff(f(x),x);`

(%o10) $$\frac{d}{d\,x}\,\frac{\mathrm{u}\,(x)}{\mathrm{v}\,(x)} = \frac{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}\,(x)}{\mathrm{v}\,(x)} - \frac{\mathrm{u}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{v}\,(x)\right)}{\mathrm{v}\,(x)^2}$$

(%i11) `factor(%);`

(%o11) $$\frac{d}{d\,x}\,\frac{\mathrm{u}\,(x)}{\mathrm{v}\,(x)} = -\frac{\mathrm{u}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{v}\,(x)\right) - \mathrm{v}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}\,(x)\right)}{\mathrm{v}\,(x)^2}$$

Integralrechnung

Die Integralrechnung ist die Umkehrung der Differentialrechnung.

1 Das unbestimmte Integral

.

(%i12) `f(x):=x**2;`

(%o12) $\mathrm{f}(x) := x^2$

(%i13) `'integrate(f(x),x) = integrate(f(x),x);`

(%o13) $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

2 Das bestimmte Integral

(%i14) `f(x):=x**2;`

(%o14) $\mathrm{f}(x) := x^2$

(%i15) `a:0;`

(%o15) 0

(%i16) `b:1;`

(%o16) 1

(%i17) `'integrate(f(x),x,a,b) = integrate(f(x),x,a,b);`

(%o17) $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

(%i18) `kill(all);`

(%o0) *done*

Kurvendiskussion

1 Nullstellen

Die Nullstellen einer Funktion sind ihre Schnittpunkte mit der x-Achse

(%i1) `f(x):=(x**2-8*x+15)*x/10;`

(%o1) $\mathrm{f}(x) := \frac{\left(x^2-8\,x+15\right)\,x}{10}$

(%i2) `solve(f(x)=0);`

(%o2) $[x=3, x=5, x=0]$

(%i3) `realroots(f(x));`

(%o3) $[x=3, x=5, x=0]$

2 Extremwerte

Zuerst die x-Werte durch NULL-Setzen der ersten Ableitung bestimmmen, die Funktionswerte durch R??ckeinsetzen in f(x). Mittels der zweiten Ableitung kann man dann entscheiden, ob ein Maximum (Hochwert) oder ein Minimum (Tiefwert) vorliegt.

Wenn die zweite Ableitung < 0 ist, liegt ein Maximum vor, wenn die zweite Ableitung > 0 ist, liegt ein Minimum vor.

(%i4) `ab:diff(f(x),x);`

(%o4) $\frac{x^2-8\,x+15}{10}+\frac{x\,\left(2\,x-8\right)}{10}$

(%i5) `solve(ab=0,x);`

(%o5) $[x=-\frac{\sqrt{19}-8}{3}, x=\frac{\sqrt{19}+8}{3}]$

(%i6) `realroots(ab);`

(%o6) $[x=\frac{40725025}{33554432}, x=\frac{138231945}{33554432}]$

3 Wendepunkte

```
(%i7) ab2:diff(f(x),x,2);
```

(%o7) $\frac{2\,x-8}{5}+\frac{x}{5}$

```
(%i8) solve(ab2=0,x);
```

(%o8) $[x=\frac{8}{3}]$

```
(%i9) realroots(ab2);
```

(%o9) $[x=\frac{89478485}{33554432}]$

Der Hauptzweck der Kurvendiskussion ist die Erstellung einer grafischen Darstellung. Dazu gibt es allerdings heute sehr gut geeignete Programme.

Regressionsrechnung

1 Lineare Regression

. Hier sind die zwei Gleichungen, die man f??r eine lineare Regression braucht:

```
(%i10) a*sum(x[i]**2,i,1,n)+b*sum(x[i],i,1,n)=sum(x[i]*y[i],i,1,n);
```

(%o10) $a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$

```
(%i11) a*sum(x[i],i,1,n)+b*n = sum(y[i],i,1,n);
```

(%o11) $b\,n + a\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$

Anmerkung: wegen der verfügbaren Summenarithmetik ist Maxima für Regressionsrechnungen ganz besonders gut geeignet.