Inhalt

Zinseszinsrechnung

Endkapital

(%i1) K[n]=K[0]*r**n;

(%o1) $K_n = K_0 r^n$

Aufzinsungsfaktor

(%i2) r=1+p/100;

(%o2) $r = \frac{p}{100} + 1$

(%i3) r=1+i;

(%o3) $r = i + 1$

Anfangskapital

(%i4) K[0]=K[n]/r**n;

(%o4) $K_0 = \frac{K_n}{r^n}$

Zinssatz

(%i5) r=(K[n]/K[0])**(1/n);

(%o5) $r = \left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{1/n}$

(%i6) p=100*(r-1);

(%o6) $p = 100(r - 1)$

Laufzeit

(%i7) n=(log(K[n])-log(K[0]))/log(r);

$$(\%o7)\quad n=\frac{\log\left(K_n\right)-\log\left(K_0\right)}{\log(r)}$$

Rentenrechnung

Endwert der nachschüssigen Rente

(%i8) E=(r**n-1)*R/i;

$$(\%o8)\quad E=\frac{\left(r^n-1\right)R}{i}$$

Barwert der nachschüssigen Rente

(%i9) B=R*(1-v**n)/i;

$$(\%o9)\quad B=\frac{\left(1-v^n\right)R}{i}$$

Endwert der vorschüssigen Rente

(%i10) E = R*((r**n-i)/d);

$$(\%o10)\quad E=\frac{\left(r^n-i\right)R}{d}$$

d ist der Diskontsatz,
d = i/(1+i)

Barwert der vorschüssigen Rente

(%i11) B=R*(1-v**n)/d;

$$(\%o11)\quad B=\frac{\left(1-v^n\right)R}{d}$$

Äquivalenzprinzip

ÄQUIVALENZPRINZIP

Das ist das Grundprinzip von Geldgeschäften:

Leistung = Gegenleistung
(bezogen auf denselben Zeitpunkt)

ANWENDUNG
* Rentenumwandlung
* Investitionsrechnung
* Tilgungsplan

```
(%i12) kill(all);
(%o0) done
```

Kosten- und Preistheorie

Lineare Kostenfunktion

Die lineare Kostenfunktion ist ein sehr einfaches Modell.
K = Gesamtkosten
k = proportionale Kosten
k*x = variable Kosten
F = Fixkosten

(%i1) K(x):=k*x+F;

(%o1) $K(x):=k\,x+F$

Bei einer linearen Kostenfunktion gibt es kein -> Betriebsoptimum!

Quadratische Kostenfunktion

(%i2) K(x):=a*x**2+b*x+c;

(%o2) $K(x):=a\,x^2+b\,x+c$

c sind die Fixkosten

Kubische Kostenfunktion

(%i3) K(x):=a*x**3+b*x**2+c*x+d;

(%o3) $K(x):=a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d$

d sind die Fixkosten
Eine geeignete Kostenfunktion dritten Grades gibt eine
s-förmige Kostenkurve

(%i4) kill(all);

(%o0) *done*

Betriebsoptimum

Das Betriebsoptimum ist jene Ausbringungsmenge, bei der die Durchschnittskosten am kleinsten werden. Die kleinsten Durchschnittskosten heißen auch langfristige Preisuntergrenze. Die Durchschnittskosten nennt man auch Stückkosten. Die Berechnung des Betriebsoptimums ist eine Extremwertaufgabe

Allgemein für Kostenfunktion

(%i1) K(x);

(%o1) $K(x)$

Allgemein für Durchschnittskosten

(%i2) DK(x):=K(x)/x;

(%o2) $DK(x) := \frac{K(x)}{x}$

Wir müssen die erste Ableitung NULL setzen, das ist die notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremwerts!

(%i3) ab:diff(DK(x),x);

(%o3) $\frac{\frac{d}{dx} K(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2}$

(%i4) l:solve(ab=0);

(%o4) $[x = \frac{K(x)}{\frac{d}{dx} K(x)}]$

Das ist die allgemeine Lösung für das Betriebsoptimum: Grenzkosten = Durchschnittskosten

Minimum der Durchschnittskosten = langfristige Preisuntergrenze

Wenn man das Betriebsoptimum in die Durchschnittskosten einsetzt, erhält man das Minimum der Durchschnittskosten. Dieses nennt man auch langfristige Preisuntergrenze.

Grenzkosten

Die Grenzkosten geben an, wie sich die Kosten ändern, wenn sich die Ausbringungsmenge im Durchschnitt um EINS ändert.

Die Grenzkosten sind die Ableitung der Gesamtkosten.

(%i5) K(x);

(%o5) $K(x)$

(%i6) GK(x):='diff(K(x),x);

(%o6) $GK(x) := \frac{d}{d\,x}K(x)$

Kostenkehre

Die Kostenkehre, ist der Wendepunkt der Kostenkurve. In der Kostenkehre haben die Grenzkosten ein Minimum.

Kostenfunktion

(%i7) K(x);

(%o7) $K(x)$

Man muss die zweite Ableitung der Kostenfunktion NULL setzen

(%i8) ab2:'diff(K(x),x,2);

(%o8) $\frac{d^2}{d\,x^2}K(x)$

(%i9) l:solve(ab2=0,x);

(%o9) $[\frac{d^2}{d\,x^2}K(x) = 0]$

Definition: Nachfrage

Die Nachfrage gibt an, wie sich die nachgefragte Menge
ändert, wenn sich der Preis ändert.

Normales Nachfragegesetz

wenn der Preis steigt, sinkt die Nachfrage und umgekehrt
wenn der Preis sinkt, steigt die Nachfrage

Eine bekannte Ausnahme ist der Snob-Effekt ("was nichts
kostet, ist nichts wert")

Lineare Nachfragefunktion

(%i10) p(x):=a*x+b;

(%o10) $p(x) := a\,x + b$

Quadratische Nachfragefunktion

(%i11) p(x):=a*x**2+b*x+c;

(%o11) $p(x) := a\,x^2 + b\,x + c$

Berechnungen

* lineare Funktion aus zwei Punkten
* lineare Funktion aus mehr als zwei Punkten
  -> lineare Regression
* quadratische Funktion aus drei Punkten

Definition: Umsatz

Der Umsatz (auch "Erlös") ist das Produkt aus
Menge x Preis

Das darf man nicht mit dem mengenmäßigen Umsatz,
den man auch Absatz (oder auch -> Nachfrage
nennt)

(%i12) U(x):=p(x)*x;

(%o12) $U(x) := p(x)\,x$

Umsatz bei linearer Nachfragefunktion

(%i13) p(x):=a*x+b;

(%o13) $p(x) := a\,x + b$

(%i14) U(x):=p(x)*x;

(%o14) $U(x) := p(x)\,x$

(%i15) U(x);

(%o15) $x\,(a\,x + b)$

(%i16) expand(%);

(%o16) $a\,x^2 + b\,x$

Ergebnis: wenn eine lineare Nachfragefunktion
gegeben ist, dann ist die Umsatzfunktion eine
quadratische Funktion

Umsatz bei quadratischer Nachfragefunktion

(%i17) p(x):=a*x**2+b*x+c;

(%o17) $p(x) := a\,x^2 + b\,x + c$

(%i18) U(x):=p(x)*x;

(%o18) $U(x) := p(x)\,x$

(%i19) U(x);

(%o19) $x\left(a\,x^2 + b\,x + c\right)$

(%i20) expand(%);

(%o20) $a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x$

Bei einer quadratischen Nachfragefunktion ergibt sich
eine Umsatzfunktion dritten Grades.

(%i21) kill(all);

(%o0) *done*

Umsatzmaximale Menge

(%i1) p(x);

(%o1) $p(x)$

(%i2) U(x):=p(x)*x;

(%o2) $U(x) := p(x)\,x$

Man muss die erste Ableitung bestimmen

(%i3) ab:diff(U(x),x);

(%o3) $x\left(\frac{d}{d\,x}p(x)\right)+p(x)$

Wenn man diese Ableitung NULL setzt, erhält man die umsatzmaximale Menge.

Umsatzmaximaler Preis

Wenn man die umsatzmaximale Menge in die Nachfrage-funktion einsetzt, erhält man den umsatzmaximalen Preis.

Maximaler Umsatz

Wenn man die umsatzmaximale Menge in die Umsatz-funktion einsetzt, dann erhält man den maximalen Umsatz.

Defintion: Gewinn

Gewinn = Erlös - Kosten
Gewinn = Umsatz - Kosten

(%i4) G(x):=E(x)-K(x);

(%o4) $G(x) := E(x) - K(x)$

(%i5) G(x):=U(x)-K(x);

(%o5) $G(x) := U(x) - K(x)$

Gewinn

(%i6) G(x) > 0;

(%o6) $x\,p(x) - K(x) > 0$

Weder Gewinn noch Verlust

(%i7) G(x)= 0;

(%o7) $x\,p(x) - K(x) = 0$

Verlust

(%i8) G(x) < 0;

(%o8) $x\,p(x) - K(x) < 0$

Berechnung der Gewinnzone

(%i9) G(x) = 0;

(%o9) $x\,p(x) - K(x) = 0$

(%i10) E(x) = K(x);

(%o10) $E(x) = K(x)$

Untergrenze der Gewinnzone:
* Break Even Point
* Nutzenschwelle
* Gewinnschwelle

Obergrenze der Gewinnzone:
* Nutzengrenze
* Gewinngrenze

Cournotsche Menge

Die Counotsche Menge ist jene Menge, für die der Gewinn maximal wird. Das ist also die gewinnmaximale Menge.

Wenn man die Cournotsche Menge in die Nachfragefunktion einsetzt, erhält man den Cournotschen Preis. Der sogenannte Cournotsche Punkt hat zwei Koordinaten: die Cournotsche Menge xC und den Cournotschen Preis pC.

Wenn man den Cournotschen Preis in den Gewinn einsetzt, erhält man den maximalen Gewinn.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wahrscheinlichkeitsverteilung

```
(%i11) n:6;
```

(%o11) 6

Zufallsvariable

```
(%i12) X:makelist(x[i],i,1,n);
```

(%o12) $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$

Absolute Häufigkeiten

```
(%i13) H:makelist(h[i],i,1,n);
```

(%o13) $[h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6]$

```
(%i14) N:sum(h[i],i,1,'n);
```

(%o14) $$\sum_{i=1}^{n} h_i$$

Relative Häufigkeiten = Wahrscheinlichkeiten

```
(%i15) P:H/N;
```

(%o15) $$\left[\frac{h_1}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \frac{h_2}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \frac{h_3}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \frac{h_4}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \frac{h_5}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \frac{h_6}{\sum_{i=1}^{n} h_i}\right]$$

Erwartungswert

(%i16) kill(all);

(%o0) *done*

(%i1) E(X)=sum(h[i]*x[i],i,1,n)/sum(h[i],i,1,n);

$$\text{(\%o1)}\quad E(X)=\frac{\sum_{i=1}^{n} h_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i}$$

(%i2) E(X)=sum(p[i]*x[i],i,1,n);

$$\text{(\%o2)}\quad E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Varianz

(%i3) V(X) = E((X-m)**2);

$$\text{(\%o3)}\quad V(X)=E\left((X-m)^2\right)$$

Streuung oder Standardabweichung

(%i4) S(X) = sqrt(V(X));

$$\text{(\%o4)}\quad S(X)=\sqrt{V(X)}$$

Beispiel: Schularbeitenstatistik

Die österreichische Notenskala ist in diesem Beispiel die Zufallsvariable X

(%i5) X:[1,2,3,4,5];

(%o5) $[1, 2, 3, 4, 5]$

Häufigkeiten:
Es gab
2 mal "Sehr gut"
3 mal "Gut"
6 mal "Befriedigend"
4 mal "Genügend"
5 mal "Nicht genügend"

(%i6) H:[2,3,6,4,2];

(%o6) $[2, 3, 6, 4, 2]$

Die Länge der Liste bestimmen als Obergrenze für den Summationsindex

(%i7) n:length(H);

(%o7) 5

(%i8) N:sum(H[i],i,1,n);

(%o8) 17

(%i9) P:H/N;

(%o9) $[\frac{2}{17}, \frac{3}{17}, \frac{6}{17}, \frac{4}{17}, \frac{2}{17}]$

Der Erwartungswert

(%i10) m:sum(P[i]*X[i],i,1,n);

(%o10) $\frac{52}{17}$

(%i11) X1:(X-m)**2;

(%o11) $[\frac{1225}{289}, \frac{324}{289}, \frac{1}{289}, \frac{256}{289}, \frac{1089}{289}]$

Die Varianz

(%i12) v:sum(P[i]*X1[i],i,1,n);

(%o12) $\frac{390}{289}$

Die Streuung (Standardabweichung)

(%i13) s:sqrt(v);

(%o13) $\frac{\sqrt{390}}{17}$

Additionssatz

(%i14) "W(A oder B) = W(A) + W(B)";

(%o14) *W(A oder B) = W(A) + W(B)*

Additionssatz auf eine Verteilung angewendet

(%i15) 'sum(W(x[k]),k,1,'n)=1;

(%o15) $\sum_{k=1}^{n} W\left(x_k\right) = 1$

Kumulierte Verteilung

(%i16) W(x<=k)='sum(W(x[i]),i,1,k);

(%o16) $W(x \leq k) = \sum_{i=1}^{k} W\left(x_i\right)$

(%i17) kill(all);

(%o0) *done*

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Binomialverteilung

Parameter:
n (Umfang der Stichprobe)
p (zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit)

(%i1) n;

(%o1) n

(%i2) p;

(%o2) p

(%i3) E:n*p;

(%o3) $n\,p$

(%i4) V:n*p*(1-p);

(%o4) $n\,(1-p)\,p$

(%i5) W(k):=binomial(n,k)*p**k*(1-p)**(n-k);

(%o5) $\mathrm{W}(k):=\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$

Poissonverteilung

Parameter: m=µ=E=V

(%i6) m;

(%o6) m

(%i7) W(k):=m**k/k!*exp(-m);

(%o7) $\mathrm{W}(k):=\frac{m^{k}}{k!}\exp(-m)$

Komplementärereignis

(%i8) "W(A')=1-W(A)";
(%o8) W(A')=1-W(A)

(%i9) kill(all);
(%o0) done

Differentialrechnung

Potenzregel

(%i1) f(x):=x**n;

(%o1) $f(x):=x^n$

(%i2) 'diff(f(x),x)=diff(f(x),x);

(%o2) $\frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1}$

Regel vom konstanten Faktor

(%i3) f(x):=c*u(x);

(%o3) $f(x):=c\,u(x)$

(%i4) 'diff(f(x),x)=diff(f(x),x);

(%o4) $\frac{d}{dx}\left(c\,u(x)\right) = c\left(\frac{d}{dx}u(x)\right)$

Summen- und Differenzregel

(%i5) f(x):=u(x)+v(x);

(%o5) $f(x):=u(x)+v(x)$

(%i6) 'diff(f(x),x)=diff(f(x),x);

(%o6) $\frac{d}{dx}\left(v(x)+u(x)\right) = \frac{d}{dx}v(x)+\frac{d}{dx}u(x)$

Produktregel

(%i7) f(x):=u(x)*v(x);

$$(\%o7)\quad f(x):=u(x)\,v(x)$$

(%i8) 'diff(f(x),x)=diff(f(x),x);

$$(\%o8)\quad \frac{d}{d\,x}\left(u(x)\,v(x)\right)=u(x)\left(\frac{d}{d\,x}v(x)\right)+v(x)\left(\frac{d}{d\,x}u(x)\right)$$

Quotientenregel

(%i9) f(x):=u(x)/v(x);

$$(\%o9)\quad f(x):=\frac{u(x)}{v(x)}$$

(%i10) 'diff(f(x),x)=diff(f(x),x);

$$(\%o10)\quad \frac{d}{d\,x}\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{\frac{d}{d\,x}u(x)}{v(x)}-\frac{u(x)\left(\frac{d}{d\,x}v(x)\right)}{v(x)^2}$$

(%i11) factor(%);

$$(\%o11)\quad \frac{d}{d\,x}\frac{u(x)}{v(x)}=-\frac{u(x)\left(\frac{d}{d\,x}v(x)\right)-v(x)\left(\frac{d}{d\,x}u(x)\right)}{v(x)^2}$$

Integralrechnung

Die Integralrechnung ist die Umkehrung der Differentialrechnung.

Das unbestimmte Integral

(%i12) f(x):=x**2;

(%o12) $f(x):=x^2$

(%i13) 'integrate(f(x),x) = integrate(f(x),x);

(%o13) $\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}$

Das bestimmte Integral

(%i14) f(x):=x**2;

(%o14) $f(x):=x^2$

(%i15) a:0;

(%o15) 0

(%i16) b:1;

(%o16) 1

(%i17) 'integrate(f(x),x,a,b) = integrate(f(x),x,a,b);

(%o17) $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$

(%i18) kill(all);

(%o0) *done*

Kurvendiskussion

Nullstellen

Die Nullstellen einer Funktion sind ihre
Schnittpunkte mit der x-Achse

(%i1) f(x):=(x**2-8*x+15)*x/10;

(%o1) $f(x) := \frac{\left(x^2 - 8x + 15\right)x}{10}$

(%i2) solve(f(x)=0);

(%o2) $[x = 3, x = 5, x = 0]$

(%i3) realroots(f(x));

(%o3) $[x = 3, x = 5, x = 0]$

Extremwerte

Zuerst die x-Werte durch NULL-Setzen
der ersten Ableitung bestimmmen,
die Funktionswerte durch Rückeinsetzen
in f(x). Mittels der zweiten Ableitung
kann man dann entscheiden, ob ein
Maximum (Hochwert) oder ein
Minimum (Tiefwert) vorliegt.

Wenn die zweite Ableitung < 0 ist,
liegt ein Maximum vor, wenn die zweite
Ableitung > 0 ist, liegt ein Minimum
vor.

(%i4) ab:diff(f(x),x);

(%o4) $\frac{x^2 - 8x + 15}{10} + \frac{x(2x - 8)}{10}$

(%i5) solve(ab=0,x);

(%o5) $\left[x = -\frac{\sqrt{19} - 8}{3}, x = \frac{\sqrt{19} + 8}{3}\right]$

(%i6) realroots(ab);

(%o6) $[x = \frac{40725025}{33554432}, x = \frac{138231945}{33554432}]$

Wendepunkte

(%i7) ab2:diff(f(x),x,2);

(%o7) $\frac{2x-8}{5} + \frac{x}{5}$

(%i8) solve(ab2=0,x);

(%o8) $[x = \frac{8}{3}]$

(%i9) realroots(ab2);

(%o9) $[x = \frac{89478485}{33554432}]$

Der Hauptzweck der Kurvendiskussion ist die Erstellung einer grafischen Darstellung. Dazu gibt es allerdings heute sehr gut geeignete Programme.

Regressionsrechnung

Lineare Regression

Hier sind die zwei Gleichungen, die man für eine
lineare Regression braucht:

(%i10) a*sum(x[i]**2,i,1,n)+b*sum(x[i],i,1,n)=sum(x[i]*y[i],i,1,n);

(%o10) $$a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)+b\sum_{i=1}^{n} x_i=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

(%i11) a*sum(x[i],i,1,n)+b*n = sum(y[i],i,1,n);

(%o11) $$b\,n+a\sum_{i=1}^{n} x_i=\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Anmerkung: wegen der verfügbaren Summenarithmetik ist Maxima für Regressionsrechnungen
ganz besonders gut geeignet.

Created with wxMaxima.